Exercice 1

Traduisons

1. par une phrase :

a. "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$"

Pour tout réel x, $x^2 + 1$ est strictement positif.

b. "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant x$"

Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que n soit inférieur ou égal à x.

2. dans un langage mathématique :

a. "Il existe au moins un réel strictement positif tel que $x^2 + x + 1$ soit strictement positif"

$\exists x > 0, x^2 + x + 1 > 0.$

b. "Pour tout réel epsilon strictement positif, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on ait u_n compris entre -epsilon et epsilon"

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow -\epsilon \leqslant u_n \leqslant \epsilon.$

Exercice 2

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduisons en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne s'annule jamais ;

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

2. f est croissante ;

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$

3. f est strictement décroissante ;

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$

4. f n'est pas la fonction nulle ;

$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

5. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

6. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n.$

7. f est inférieure à g ;

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x).$

8. f n'est pas inférieure à g ;

$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x).$

Exercice 3

Complétons les pointillés par le connecteur logique approprié : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x = 2 \Rightarrow \ x^2 = 4)$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 9 \Leftrightarrow \ x = -3$ ou $x = 3)$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftarrow \ x = 1)$

Exercice 4

Etant données deux propositions p et q, est-il vrai que la proposition $p \iff q$ est équivalente à $(p \Rightarrow q)$ et (Non $q \Rightarrow$ Non p) ?

Pour vérifier cela, établissons une table de vérité.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	non $\mathscr{Q} \Rightarrow$ Non $\mathscr{P}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ et non $\mathscr{Q} \Rightarrow$ Non $\mathscr{P}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

On remarque qu'il n'y a pas équivalence.

Exercice 5

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geqslant 3$;
Faux, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 2$ et $x < 3$. En effet, $2,5$ convient (on l'appelle contre-exemple).

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$;
Faux, $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, x < y$ et $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$;
Prenons $x = -3$ et $y = 5$; $x < y$ et $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$.

3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, x < \sqrt{x}$;
Vrai, $x = 0,25$ convient.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$;
Faux, $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geqslant 0$ et $x < 0$. En effet, $x = -10$ convient.

5. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Rightarrow 3x > 1$;
Vrai, pour tout réel $x, x^2 \geqslant 0$ donc l'implication est vraie.

6. $\forall x \in \mathbb{R}, 5x < 7 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$;
Pour tout réel $x, x^2 \geqslant 0$ donc l'implication est vraie.

Exercice 6

Nions les assertions suivantes :

1. tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ;
sa négation est : il existe un habitant de la rue du Havre aux yeux bleus qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.

2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
sa négation est : il existe une écurie où il y a un cheval pas noir.

3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
sa négation est : il existe un entier x, pour tout entier y, il existe un entier z, $z < x$ et $z \geqslant x + 1$.

Exercice 7

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nions, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
Sa négation est : il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 1$.

2. L'application f est croissante.
Sa négation est : l'application f n'est pas croissante i.e
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) > f(y)$.

3. L'application f est croissante et positive.
Sa négation est : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) > f(y)$" ou "$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".

4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
Sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) > 0$.

5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.
Sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$.

Remarque : le "et" se note $\wedge$, le "ou" se note $\vee$.

Exercice 8

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Donnons leur négation.

$$(\text{non } a)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0 \quad ; \quad (\text{non } b)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0\ ;$$

$$(\text{non } c)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0 \quad ; \quad (\text{non } d)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leqslant x.$$

2. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

L'assertion a est fausse puisque non a est vraie.
En effet, pour tout réel x, prenons $y=-x-1$, alors $x+y<0$.
L'assertion b est vraie.
En effet, pour tout réel x, prenons $y=-x+8$, alors $x+y>0$.
L'assertion c est fausse puisque non c est vraie.
En effet, prenons $x=-6$ et $y=-8$, alors $x+y \leqslant 0$.
L'assertion d est vraie.
En effet, prenons $x=-6$, pour tout réel y, $y^2>x$.

Exercice 9

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. S'il existe une fleur qui n'est pas une rose, alors toutes les fleurs sont des roses.
Faux ! Il existe des fleurs qui ne sont pas des roses mais toutes les fleurs ne sont pas des roses.

2. Si toutes les fleurs sont des roses, alors il existe au moins une rose qui n'est pas une fleur.
Vrai ! L'assertion "toutes les fleurs sont des roses" étant fausse, l'implication est vraie.

3. Les chats aboient ou les chiens miaulent.
Faux ! Les chats n'aboient pas et les chiens ne miaulent pas.

4. Un chien n'est pas un chat si et seulement si un chat n'est pas un chien.
Vrai ! En effet, "un chien n'est pas un chat" est vraie ainsi que "un chat n'est pas un chien".

Exercice 10

Montrons que pour tous a, b, c dans $\mathbb{Z}$,
$a+b+c=0 \Rightarrow a \leqslant 0$ ou $b \leqslant 0$ ou $c \leqslant 0$.

Démontrons la contraposée i.e montrons que $a>0$ et $b>0$ et $c>0 \Rightarrow a+b+c \neq 0$.

Si $a>0$ et $b>0$ et $c>0$, alors $a+b+c>0$ d'où le résultat.

Exercice 11

Un peu plus coquin ...

Démontrons par l'absurde le résultat suivant
$(\forall \epsilon>0, a<b+\epsilon) \Rightarrow a \leqslant b$.

Supposons que $a>b$ et montrons que cela amène à une contradiction mathématique.

On sait que $\forall \epsilon>0, a<b+\epsilon$.

$a>b$ donc $a-b>0$.

Posons $\epsilon=a-b$.

$\epsilon>0$ donc on aurait $a<b+\epsilon$ et par suite, $a<a$, ce qui amène une contradiction mathématique.

Ainsi, a ne peut être strictement supérieur à b donc $a \leqslant b$.

Exercice 12

Démontrons que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Procédons par disjonction de cas.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, $\dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}$ et par suite, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
- Si n est impair, $n+1$ est pair donc $\dfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$ et par suite, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Dans tous les cas, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Exercice 13

Velma a perdu ses lunettes et a perdu la notion du temps. Elle ne se souvient plus du jour de la semaine. Heureusement, Sammy et Scooby-Doo sont là pour l'aider. Velma sait que lundi, mardi et mercredi, Sammy ne dit jamais une phrase vraie et ne ment pas pendant le reste de la semaine. Scooby-Doo ne fait que mentir jeudi, vendredi et samedi et dit la vérité pendant les autres jours.

Avant de traiter les questions, résumons dans un tableau les données de l'exercice.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Sammy	M	M	M	V	V	V	V
Scooby-Doo	V	V	V	M	M	M	V

1. Velma surprend la conversation suivante entre Sammy et Scooby-Doo

★ Sammy : Hier, je mentais.

★ Scooby-Doo : Moi aussi.

Velma a un raisonnement logique infaillible. Elle en déduit le jour de la semaine. Retrouvons ce jour.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse :

Procédons par disjonction de cas.

- Sammy dit la vérité i.e il mentait la veille.
  Alors, nous sommes jeudi.
  Synthèse : Peut-on être jeudi ? Scooby-Doo annonce qu'il mentait également la veille, ce qui voudrait dire qu'il ment aujourd'hui, ce qui est bien le cas.
- Sammy ne dit pas la vérité i.e il disait la vérité la veille.
  Alors, nous sommes lundi.
  Synthèse : Peut-on être lundi ? Scooby-Doo annonce qu'il mentait également la veille, mais les dimanches et les lundis, il dit la vérité. On ne peut être lundi.

Conclusion : on est jeudi.

2. Une autre fois, Velma rencontre seulement Sammy qui prononce les deux phrases suivantes

★ Je mentais hier.

★ Je mentirai de nouveau dans trois jours.

Déterminons le jour de leur rencontre.

De la même façon :

- Si Sammy dit la vérité, alors la première assertion implique que l'on est jeudi.
  Ceci est impossible car il ne ment pas trois jours après.
- Si Sammy ment, alors il disait la vérité hier, ce qui implique que l'on est lundi.
  Peut-on être lundi ? C'est le cas s'il dit la vérité jeudi, ce qui est le cas.

Conclusion : on est lundi.

3. Déterminons quels jours la phrase suivante a pu être prononcée par Sammy.

★ Hier, je mentais et je mentirai de nouveau demain.

De la même façon :

- Sammy dit la vérité : ceci n'est pas possible
- Sammy ment i.e hier il disait la vérité ou il dira la vérité de nouveau demain.
  On est soit lundi, soit mercredi.

Conclusion : on est lundi ou mercredi.