**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$. La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit $n$ un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les évènements suivants :
– A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
– B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
– *Jn* : « le jardinier obtient $n$ tulipes jaunes ».

**1.** Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
**a.** Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
**b.** Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
**c.** Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes,
**d.** Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

**2.** Probabilités conditionnelles
**a.** Montrer que : $P(Jn/\mathrm{B}) = \binom{50}{n}2^{-50}$.
**b.** En déduire la probabilité que le jardinier obtienne $n$ tulipes jaunes.
**c.** On note $p_n$ la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que *Jn* est réalisé. Établir que :

$$p_n = .\frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$

**d.** Pour quelles valeurs de $n$ a-t-on $p_n \geq 0,9$ ?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

**EXERCICE 3** **5 points**

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

**Partie A**

1. Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;
A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;
B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;
B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;
C1 : « la particule entre dans K1 » ;
C2 : « la particule entre dans K2 ».
2. On procède 5 fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

**Partie B**

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B. On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$ , on a $p(0) = 0,75$ .
Plus généralement, si $t$ est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ où $\lambda$ est une constante réelle. La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5730 ans.
1. Calculer $\lambda$ ; on prendra une valeur approchée à $10^{-5}$ près par défaut.
2. Au bout de combien d'années, 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de $t$ pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

[1] Temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

## Correction AmériqueSudNov2006

**1.** **a.** On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et $n = 50$.

**b.** On a $E = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

**c.** On a $p(X = n) = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

**d.** $p(X = 15) = \binom{50}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-15} \approx 0,089$.

**2.** **a.** Si lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi de Bernoulli a ici pour paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$.
La probabilité d'obtenir $n$ tulipes jaunes est donc :
$p_B(J_n) = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \binom{50}{n}2^{-50}$.

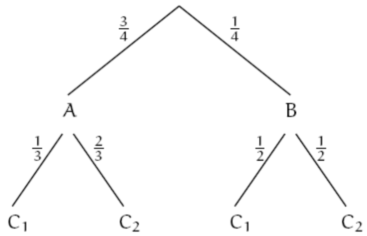
**b.** De la même façon que précédemment $p_A(J_n) = \binom{50}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.
A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,
$p(J_n) = p(A \cap J_n) + p(B \cap J_n) = p(A) \times p_A(J_n) + p(B) \times p_B(J_n) =$
$\frac{1}{2}\binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2}\binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}} = \frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}}\right) = \frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right)$.

**c.** $$p_n = p_{J_n}(A) = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{p_A(J_n) \times p(A)}{p(J_n)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}}\right)} =$$
$$\frac{\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\left(\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}.$$

**d.** $p_n \geqslant 0,99 \iff \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}} \geqslant 0,99 \iff 3^{50-n} \geqslant 0,9\left(3^{50-n}+2^{50}\right) \iff$
$0,1 \times 3^{50-n} \geqslant 0,9 \times 2^{50} \iff (50-n)\ln 3 \geqslant \ln\left(9 \times 2^{50}\right) \iff n \leqslant 50 - \frac{\ln\left(2^{50} \times 9\right)}{\ln 3}$
$\iff n \leqslant 16,4$.
Conclusion : il faut que $n < 17$.
Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.

## Correction France Sep 2004

**1)** Représentons la situation par un arbre




$$p(A_1) = p(A \cap C_1) = p(A) \times p_A(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \text{ et } p(A_2) = p(A \cap C_2) = p(A) - p(A \cap C_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$p(B_1) = p(B \cap C_1) = p(B) \times p_B(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ et } p(B_2) = p(B \cap C_2) = p(B) - p(B \cap C_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(C_1) = p(C_1 \cap A) + p(C_1 \cap B) = p(A_1) + p(B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = 1 - p(C_1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$\boxed{p(A_1) = \frac{1}{4},\ p(A_2) = \frac{1}{2},\ p(B_1) = p(B_2) = \frac{1}{8},\ p(C_1) = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = \frac{5}{8}.}$$

**2)** Notons X le nombre de particules qui entrent dans $K_2$. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la particule entre dans $K_2$ » avec une probabilité $p = \frac{5}{8}$ (d'après 1)) ou « la particule n'entre pas dans $K_2$ » avec une probabilité $1 - p = \frac{3}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{8}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 10 \times \frac{5^2 \times 3^3}{8^5} = \frac{5^3 \times 3^3}{2^{14}} = \frac{3375}{16384} = 0,205 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

**1)** Soit $\lambda$ un réel.

$$p(5730) = \frac{p(0)}{2} \Leftrightarrow 0,75e^{-5730\lambda} = \frac{0,75}{2} \Leftrightarrow e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{5730\lambda} = 2 \Leftrightarrow 5730\lambda = \ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{5730}.$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} = 0,00012 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

**2)** Soit t un réel positif.

$$p(t) \leq \frac{90}{100} \times p(0) \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} \leq 0,9 \times 0,75 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow e^{\lambda t} \geq \frac{10}{9} \Leftrightarrow \lambda t \geq \ln(\frac{10}{9}) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(10/9)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t \geq \frac{5730\ln(10/9)}{\ln(2)} = 870,9\ldots.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Au bout de 871 années (arrondi à l'unité), 10\% au moins des particules de type A se seront transformées en des particules de type B.}}$$

**3)** Soit t un réel positif.

$$p(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{0,5}{0,75} \Leftrightarrow e^{\lambda t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda t = \ln(3/2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3/2)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{5730\ln(3/2)}{\ln(2)} = 3351,8\ldots.$$

$$\boxed{\text{Au bout de 3352 années (arrondi à l'unité), il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.}}$$

## EXERCICE 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

- Soit A l'évènement : « être une particule du type A » ; $p(\text{A}) = 0,75$.
- Soit B l'évènement : « être une particule du type B » ; $p(\text{B}) = 0,25$.

On a $p_{\text{A}}(\text{K1}) = \frac{1}{3}$, $p_{\text{A}}(\text{K2}) = \frac{2}{3}$ ; et $p_{\text{B}}(\text{K1}) = \frac{1}{2}$, $p_{\text{B}}(\text{K2}) = \frac{1}{2}$.

**1.** $p(\text{A1}) = p(\text{A} \cap \text{K1}) = p_{\text{A}}(\text{K1}) \times p(\text{A}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ;

$p(\text{A2}) = p(\text{A} \cap \text{K2}) = p_{\text{A}}(\text{K2}) \times p(\text{A}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ;

$p(\text{B1}) = p(\text{B} \cap \text{K1}) = p_{\text{B}}(\text{K1}) \times p(\text{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ;

$p(\text{B2}) = p(\text{B} \cap \text{K2}) = p_{\text{B}}(\text{K2}) \times p(\text{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ;

$p(\text{C1} = p[(\text{A} \cap \text{K1}) \cup (\text{B} \cap \text{K1})] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ ;

$p(\text{C2} = p[(\text{A} \cap \text{K2}) \cup (\text{B} \cap \text{K2})] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ ;

**2.** On a une expérience de Bernoulli avec $n = 5$ et $p = \frac{5}{8}$.

On a $p(\text{E}) = \binom{5}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3 \approx 0,206$.

**Partie B**

**1.** À l'instant 0, la proportion est de 0,75 et au bout de 5 730 ans la proportion n'est plus que la moitié soit 0,375.

Soit $0,375 = 0,75e^{-5730\lambda} \iff \frac{1}{2} = e^{-5730\lambda} \iff -5730\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{5\,730} \approx 0,000\,12$ à $10^{-5}$ près par défaut.

**2.** On cherche le temps $t$ au bout duquel il ne reste plus que 90 % de particules soit $0,75e^{-0,00012t} \approx 0,9 \times 0,75 \iff e^{-0,00012t} \approx 0,9 \iff -0,00012t \approx \ln(0,9) \iff t \approx \frac{\ln 0,9}{-0,00012} \approx 878$ ans.

**3.** Même question avec 50 % :

$0,75e^{-0,00012t} \approx 0,5 \iff e^{-0,00012t} \approx \frac{0,5}{0,75} \iff -0,00012t \approx \ln\frac{2}{3} = \iff$

$t \approx \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0,00012} \approx 3\,379$ ans