Correction du devoir maison : Flocon de Von Koch

1. **Etude du nombre de côtés**
   a. Faisons un tableau sans donner d'explication.

n	1	2	3	4
Cn	3	12	48	192

   b. Chaque segment de l'étape n en donne 4 à l'étape suivante. Par conséquent, $C_{n+1} = 4C_n$ et ainsi on en déduit que la suite C est la SG de raison 4 et de premier terme $C_1 = 3$ *et donc pour tout* $n \geq 1$, $\boxed{C_n = C_1.4^{n-1} = 3.4^{n-1}}$

2. **Etude du périmètre**
   a. Chaque segment de l'étape n+1 a une longueur égale au tiers d'un segment de l'étape n, soit $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Ainsi, on en déduit que la suite u est la SG de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = 1$ soit pour tout $n \geq 1$, $\boxed{u_n = u_1.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}}$

   b. Le périmètre du flocon à l'étape n est obtenu en effectuant le produit du nombre de côtés par la longueur de chacun des côtés soit pour tout $n \geq 1$,
   $\boxed{p_n = C_n.u_n = 3.4^{n-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3.\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$

3. **Etude de l'aire**
   a. Calculons a_1.
   Dans un triangle équilatéral, on sait que la hauteur a pour longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ où a désigne la longueur du côté (se démontre aisément grâce au théorème de Pythagore).
   Ainsi, on a $\boxed{a_1 = \frac{1}{2}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$

   b. Pour tout entier $n \geq 1, a_{n+1} - a_n$ représente donc l'aire des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.
   Ainsi pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{a_{n+1} - a_n = C_n.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.(u_{n+1})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.3.4^{n-1}.\left(\frac{1}{9^n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}.\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}$

   c. En enlevant les parenthèses, on trouve avec « le gêneur et le tueur » $a_n - a_1$.
   Considérons pour tout entier $n \geq 1, v_n = a_{n+1} - a_n$.
   D'après la question précédente, la suite v est la SG de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $v_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$.
   La somme considérée est la somme des n – 1 premiers termes de la SG v donc on a :
   $a_n - a_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20}.\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$ et par suite, $\boxed{a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}.\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}$

   d. A la calculatrice, on trouve $\boxed{a_{50} \cong 0{,}693}$.