Sens de variation d'une suite – correction –

Correction Exercice 1

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$
Or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 1 > 0$.
Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 - (3n - 5) \\ &= 3n + 3 - 5 - 3n - 5 \\ &= 3 \\ &> 0 \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc croissante.

3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \\ &> 0 \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc décroissante.

4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc croissante.

5. $u_n = \dfrac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} n < n + 1 &\Leftrightarrow n + 4 < (n+1) + 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+4} > \frac{1}{(n+1)+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{n+4} < \frac{-2}{(n+1)+4} \\ &\Leftrightarrow u_n < u_{n+1} \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc croissante.

6. $u_n = \dfrac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5^{n+1}}{n+1} - \frac{5^n}{n} \\ &= 5^n \times \frac{5}{n+1} - \frac{5^n}{n} \\ &= 5^n\left(\frac{5}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 5^n \times \frac{5n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= 5^n \times \frac{4n - 1}{n(n+1)} \end{aligned}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $5^n > 0$ et $4n - 1 > 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - 1 - \left(2n^2 - 1\right) \\ &= 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - 1 - 2n^2 + 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 + 1 \\ &= 4n + 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc croissante.

8. $u_n = \dfrac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} \\ &= 3^n \times \frac{3}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} \\ &= 3^n\left(\frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2n}\right) \\ &= 3^n \times \frac{3n - (n+1)}{2n(n+1)} \\ &= 3^n \times \frac{2n - 1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $3^n > 0$ et $2n - 1 > 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

Correction Exercice 2

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{n^2-(n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2-\left(n^2+2n+1\right)}{2n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

2.

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n^2+1}{2n^2} - 1 \\ &= \frac{n^2+1}{2n^2} - \frac{2n^2}{2n^2} \\ &= \frac{1-n^2}{2n^2} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $1 - n^2 \leqslant 0$.
Par conséquent $u_n \leqslant 1$.

Correction Exercice 3

1. $u_0 = (-1)^0 = 1$, $u_1 = (-1)^1 = -1$ et $u_2 = (-1)^2 = 1$.
La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2-(n+1)}{2+(n+1)} - \frac{2-n}{2+n} \\ &= \frac{1-n}{3+n} - \frac{2-n}{2+n} \\ &= \frac{(1-n)(2+n)-(3+n)(2-n)}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{2+n-2n-n^2-\left(6-3n+2n-n^2\right)}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{2-n-n^2-6+n+n^2}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{-4}{(3+n)(2+n)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

3.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1)^2 + 2(n+1) - 1 - \left(n^2+2n-1\right) \\ &= n^2+2n+1+2n+2-1-n^2-2n+1 \\ &= 2n+3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc croissante.