AP Loi binomiale

Exercice 1

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}95$.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant.

2. En déduire $P(X = 1)$.

Exercice 2

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$.
Sans utiliser de calculatrice, calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.

Exercice 3

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{9}{10}$.

1. Sans utiliser de calculatrice, calculer $P(X \leqslant 1)$.

2. En déduire $P(X \geqslant 2)$.

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}7$.
La fonction **loiDeProbabilite** ci-dessous renvoie une liste **bino** telle que, pour tout entier naturel k, la valeur **bino[k]** est égale à $P(X = k)$.
La recopier et la compléter.

```
from math import factorial

def LoiDeProbabilite():
    bino = 11*[0]
    for k in range(...):
        bino[k] = ...
    return bino
```

AIDE

La fonction **factorial(n)** permet d'obtenir $n!$.

Exercice 5

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = \frac{3}{7}$. Sans utiliser de calculatrice, calculer et interpréter l'espérance de X.

Exercice 6

D'après ses statistiques de course, Clémentine gagne à un jeu en ligne de Formule 1 avec une probabilité égale à 0,71. Sa victoire est considérée comme aléatoire car elle ne connaît pas ses opposants à chaque partie.

Justifier que, lorsque Clémentine joue une partie, cela correspond à une épreuve de Bernoulli.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$.

1. Résumer la loi de probabilité de X dans un tableau.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8

Pendant une partie de jeu de rôle, l'elfe joué par Delphine combat un troll. Deux stratégies sont possibles : une attaque normale ou une attaque spéciale.

1. Avec son attaque normale, elle doit lancer cinq dés à six faces. Pour vaincre le troll, elle doit obtenir au moins trois faces d'une valeur de 5 ou plus.
Quelle est la probabilité de le vaincre durant cette phase à l'aide d'une attaque normale ?

2. Avec une attaque spéciale, elle lance deux dés. Si elle obtient au moins un 6, l'ennemi est tué.
Quelle est la probabilité de vaincre le troll durant cette phase à l'aide d'une attaque spéciale ?

3. Quelle est l'attaque la plus efficace ?

Exercice 9

On suppose que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent en haut de la falaise où se trouvent seulement deux chemins menant vers deux plages. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard, de façon équiprobable et indépendamment des autres, l'une des deux directions suivantes : la plage à l'est ou la plage à l'ouest. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'est.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.

2. On suppose ici que les deux plages sont désertes au départ. On considère qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

b. Lorsque $n = 3$, quelle est la probabilité d'avoir un touriste heureux ?

c. De façon générale, démontrer que la probabilité p qu'il y ait un touriste heureux parmi n touristes est $p = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d. En déduire la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux sur un groupe de dix touristes.

Exercice 10

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Cet exercice propose de démontrer que $E(X) = np$.

1. Démontrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. On rappelle que $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k)$.

Donner l'expression de $P(X = k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$ puis en déduire que l'espérance de X est égale à :

$$E(X) = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}.$$

AIDE

$k = 0$ n'apparaît pas dans la somme : pourquoi ?

3. En effectuant le changement d'indice $i = k - 1$, montrer que $E(X) = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i}$.