

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats seront encadrés.
Chaque exercice sera commencé sur une nouvelle page.

-La calculatrice et les téléphones portables sont interdits-

Exercice 1 : Questions de cours et technique

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Sans justifier, donner les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$

2. Démontrer les deux inégalités suivantes :

- $\forall (a; b) \in [0; 1]^2, |e^b - e^a| \leq e \times |b - a|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ e^x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \ln(x + 1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en -1 et en 0 .

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 - e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 .

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$.

- (a) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser.
- (b) Donner le sens de variations de f^{-1} .
- (c) Sur quel intervalle la fonction f^{-1} est-elle dérivable? Justifier puis dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- (d) Déterminer l'expression de f^{-1} .

6. Rappeler les formules des sommes des trois séries géométriques dans le cas où $q \in]-1; 1[$.

7. Recopier et compléter : la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si ...

8. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{2^n}$.

9. Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n \times (-1)^n}{n!}$.

10. (a) Démontrer que $\forall k \geq 1, \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$.

(b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

11. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

Après avoir justifié que f était de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$, démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$\forall x > 1, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 2

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B .

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0,7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0,1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0,05.

(a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

On notera E : "il y a une erreur de transmission".

(b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

Le résultat sera écrit sous forme d'une fraction.

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBBA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B , et le jour 6 le serveur A . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\dots$)

On introduit, pour $k \geq 1$, les événements A_k : "le serveur choisi le jour k est le serveur A " et B_k l'événement correspondant au choix du serveur B le jour k .

On suppose que le nombre de jours est infini.

(a) On désigne par ch_A l'événement "On choisit A un jour donné".

Après avoir exprimé $\overline{ch_A}$ à l'aide des événements A_k ou B_k , démontrer que $\mathbb{P}(ch_A) = 1$.

(b) On note, pour $n \geq 1$, L_n l'événement "la première série est de longueur n ".

Ainsi, pour $k \geq 1$, L_k est réalisé si, pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et l'autre serveur le $(k+1)$ ème jour.

Justifier soigneusement, en écrivant L_k à l'aide des événements A_i et B_j , que, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(L_k) = (0,3)^k \times (0,7) + (0,7)^k \times (0,3).$$

(c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_k) = 1$.

(d) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} n \times \mathbb{P}(L_n)$ est convergente et calculer sa somme. (On interprètera cette valeur comme la longueur moyenne de la première série de serveurs. Ce résultat sera donné sous forme de fraction).

Exercice 3

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

En déduire le sens de variation de φ' , et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet que $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ .

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. (a) Justifier que $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
(b) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$. (On pourra utiliser le changement de variable $X = 1 - x$).
(c) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0.

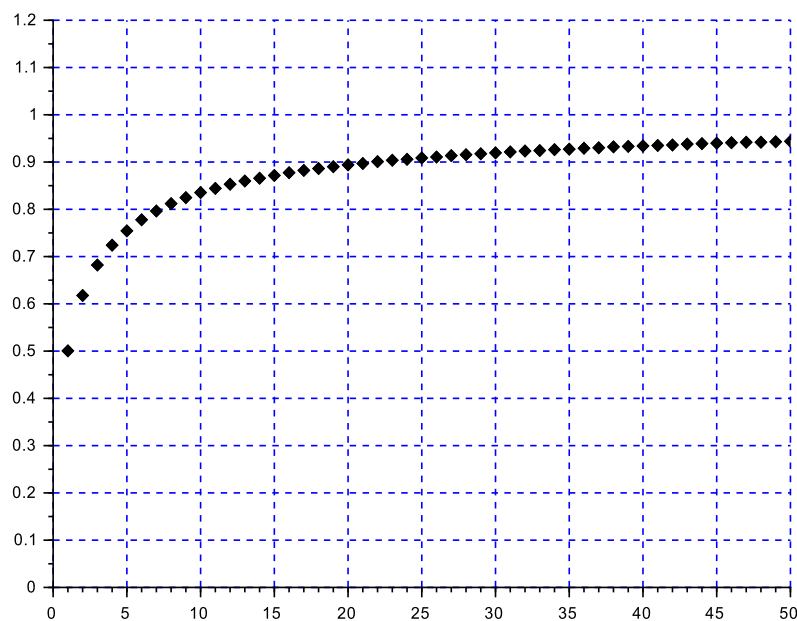
Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
3. Déterminer u_1 et u_2 .
4. (a) Recopier et compléter la fonction suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1  function u = valeur_approchee(n)
2      a = 0
3      b = 1
4      while ...
5          c = (a + b) / 2
6          if (c^n + c - 1) > 0 then
7              ...
8          else
9              ...
10         end
11         u = ...
12     end
13 endfunction
```

- (b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



5. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(u_n) = n$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.