Exercice 1

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
2. $2XP'(X) - P(X) = X^2 - X$

Exercice 2

Sommes de puissances d'entiers.

1. a. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que
   $P(X) - P(X-1) = X^2$.

   b. En déduire la valeur de $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
2. Déterminer par une méthode analogue la valeur de
   $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 3

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. Division euclidienne de $A = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - X + 1$ par $B = X - 3$.
2. Division euclidienne de $A = -3X^6 + 7X^5 - 3X^2 + X^4 + X^3 - 5X + 1$ par $B = X^2 - X - 1$.
3. Division euclidienne de $A = \dfrac{1}{5}X^3 - \dfrac{3}{5}X + 1$ par $B = X^2 + X - \dfrac{1}{2}$.
4. Division euclidienne de $A = 2X^4 - X^3 + X - 2$ par $B = X^2 - 2X + 4$.
   En déduire une relation entre A et B.
5. Division euclidienne de $A = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$ par
   $B = (X-2)^2$.
   Factoriser alors A au maximum.

Exercice 4

Soit $n \geqslant 3$ et les polynômes $P = X^n - 2$ et $Q = X(X^2-1)$.

1. Écrire formellement la division euclidienne de P par Q. Quelle condition doit vérifier le reste de cette division ?
2. Déterminer alors ce reste.

Exercice 5

Soit le polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Montrer que P est factorisable par $X+2$.
2. En déduire trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2+bX+c)$.
3. En déduire toutes les racines de P, et donner la factorisation maximale de P.
4. Étudier le signe de $P(X)$.
5. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

   a. $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

   b. $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 6 \geqslant 0$.

Exercice 6

On considère le polynôme suivant :
$P(x) = x^3 + \left(1 - 3\sqrt{2}\right)x^2 + \left(4 - 3\sqrt{2}\right)x + 4$.

1. Trouver une racine évidente (que l'on notera α) de P (essayer 0, 1, -1, 2 et -2).
2. Trouver trois réels a, b et c tels que :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)$.
3. En déduire toutes les racines de P et le factoriser si possible.

Même exercice avec $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Exercice 7

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 3 possédant trois racines réelles notées a, b et c.

1. Écrire P sous forme factorisée.
2. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc.$$

3. Application : trouver deux racines évidentes au polynôme
   $P = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$.
   En déduire la troisième racine de P.

Exercice 8

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2 dont on note les coefficients $a_n, \ldots, a_0$.

1. Montrer que 0 est racine de P si et seulement si $a_0 = 0$.

2. Montrer que 1 est racine de P ssi $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 = 0$.
3. Montrer que 0 est racine double de P ssi $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$.

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que : (P est pair) si et seulement si tous ses coefficients d'indices impairs sont nuls ($a_1 = 0$, $a_3 = 0$, ...).

Exercice 10

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ et $B = x(x-1)$. Montrer que 0 et 1 sont racines de A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exercice 11

Soit $P = X^4 - 2X + 1$.
Donner, sans faire la division euclidienne, le reste de la division euclidienne de P par $Q = (X-1)(X+2)$.

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b et c tels que :

1. $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. $\dfrac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
3. $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$.

Exercice 13

Cas particuliers de la méthode de décomposition en éléments simples.
Définition : On appelle fraction rationnelle toute fonction définie par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes avec $Q \neq 0$. $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ Q(x) \neq 0\}$.

Le but de cet exercice est d'apprendre à modifier la forme de certaines fractions rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque la factorisation du polynôme Q ne fait apparaître qu'une seule fois chaque racine (on dit que Q est scindé à racines simples).

Supposons donc $Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, avec toutes les racines α_i étant deux à deux distinctes.
On distingue deux cas :

- Si $\deg(P) < \deg(Q)$, on cherche des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{x-\alpha_n}$
- Dans le cas contraire, on commence par poser la division euclidienne de P par Q, dont on note A le quotient et R le reste. On peut alors écrire : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ et on applique la méthode du point précédent à $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Appliquer cette méthode, dite « de décomposition en éléments simples », aux fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{2x+5}{x^2-4x+3}$
2. $\dfrac{x^4}{x^2-4x+3}$
3. $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2-21x+18}$
4. $\dfrac{x^4}{x^3+2x^2-21x+18}$

Remarque : la méthode décrite dans cet exercice peut être utile pour trouver des primitives de certaines fractions rationnelles, et donc calculer des intégrales.

Exercice 14

On se propose de déterminer $E = \{P \in \mathbb{R}[X],\ (X^2+1)P'' - 6P = 0\}$.

1. Montrer que, si $P \in E$, $\deg(P) \leqslant 3$.
   Indication : regarder le terme de plus haut degré.
2. En écrivant P sous la forme $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, déterminer le système que doivent vérifier les coefficients a, b, c et d pour que $P \in E$.
3. En déduire que $E = \{a(X^3+X),\ a \in E\}$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 - 1 = 0$
2. $e^{2x} - e^x - 2 = 0$