Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Montrons que X est une variable à densité et déterminons-en une densité.

Pour montrer que X est une variable à densité, montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

- F est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
  $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ existe et vaut 0 qui est $F(0)$.
  Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction nulle est C^1 sur $]-\infty;0[$ et la fonction $x \to 1-e^{-x^2/2}$ l'est sur $]0;+\infty[$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Déterminons à présent une densité de X.

On sait qu'une densité f est telle que $f(x) = F'(x)$ aux valeurs où F est dérivable et pour les autres valeurs, on peut choisir une valeur positive ou nulle.

Ainsi, une densité de f est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e \\ 1 - \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \geqslant e \end{cases}$

1. Montrons que X est une variable aléatoire à densité.

   Pour montrer que X est une variable à densité, montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

   - F est continue sur $]-\infty;e[$ et sur $]e;+\infty[$.
     $\lim\limits_{x\to e^-} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to e^+} F(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to e} F(x)$ existe et vaut 0 qui est $F(e) = 1 - \dfrac{1}{\ln(e)} = 0$.
     Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$.

   a. La fonction nulle est C^1 sur $]-\infty;e[$ et la fonction $x \to 1 - \dfrac{1}{\ln(x)}$ l'est sur $]e;+\infty[$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en e.

2. Déterminons une densité f de X.

   On sait qu'une densité f est telle que $f(x) = F'(x)$ aux valeurs où F est dérivable et pour les autres valeurs, on peut choisir une valeur positive ou nulle.

   Ainsi, une densité de f est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant e \\ \dfrac{1}{x(\ln(x))^2} & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Déterminons le réel μ tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$ (médiane de X).

   F est nulle sur $]-\infty;e[$ donc l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $]-\infty;e[$.
   Sur $]e;+\infty[$:
   $F(x) = \dfrac{1}{2} \iff \ln(x) = 2$ i.e $x = e^2$.
   Ainsi, $\mu = e^2$.

Exercice 3

Dans chaque cas, déterminons si la fonction f est une densité de probabilité.

f est une densité de probabilité si

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

1. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est nulle sur $\mathbb{R}^+$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

  Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$.

  Soit $x < 0$, $\displaystyle\int_x^0 e^t dt = 1 - e^x$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

  Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

f est bien une densité de probabilité.

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant e-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en éventuellement en 0 et en $e-1$
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est nulle sur $-\infty; 0[$ et sur $]e-1; +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}dx$.

  $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1$.

f est bien une densité de probabilité.

3. $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1
- f n'est pas positive sur $]0; 1[$

f n'est pas une densité de probabilité.

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est nulle sur $]-\infty; 1[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^1 f(t)dt$ converge.

  Étudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

  Soit $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{x} + 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$.

  Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

f est bien une densité de probabilité.

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^4} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1; 1[\\ \dfrac{1}{x^4} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et en 1
- f est positive sur $\mathbb{R}$
- Étudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

  Soit $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x t^{-4}dt = \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_1^x = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{3}$.

  On remarque que f est paire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{2}{3} \neq 1$.

f n'est pas une densité de probabilité.

On associe une variable aléatoire X à chaque densité.

Déterminons alors sa fonction de répartition.

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt$.

1. • Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^t dt \end{aligned}$$

Soit $y \leqslant x$, $\displaystyle\int_y^x e^t dt = e^x - e^y$ et par suite, $F(x) = e^x$.

• Si $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= 1 + \int_0^x f(t)dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. • Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Si $0 \leqslant x \leqslant e - 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= [\ln(t+1)]_0^x \\ &= \ln(x+1) \end{aligned}$$

• Si $x > e - 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{e-1} f(t)dt + \int_{e-1}^{+\infty} 0dt \\ &= [\ln(t+1)]_0^{e-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant e-1 \\ 1 & \text{si } x > e-1 \end{cases}$.

4. • Si $x < 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Si $x \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \\ &= 1 - 1/x \end{aligned}$$

Ainsi, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 4

Dans chaque cas, déterminons (si possible) le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

On remarque tout d'abord que les trois fonctions sont bien continues sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \in [0;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   f est une densité de probabilité ssi $a \geqslant 0$ et $\int_0^2 ax^2 dx = 1$ soit $a = \dfrac{3}{8}$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   f est une densité de probabilité ssi $\int_0^a x^2 dx = 1$ soit $a = \sqrt[3]{3}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-a;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   f est une densité de probabilité ssi $\int_{-a}^a x+1 dx = 1$ soit $a = 1/2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

1. Montrons que f est une densité.
   f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1 et positive sur $\mathbb{R}$.
   La fonction étant nulle sur $]-\infty;1[$, $\int_{-\infty}^1 f(x)dx$ converge et vaut 0.
   Soit $t \geqslant 1$, $\int_1^t f(x)dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \dfrac{1}{x}$.
   Par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.
   Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.
   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité. X admet-elle une espérance ?
   X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.
   La fonction f étant nulle sur $]-\infty;1[$, nous sommes ramenés à l'étude de la convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}dx$.
   Or, cette intégrale de Riemann est divergente donc X n'admet pas d'espérance.
3. Soit $a \neq 0$. Donnons une densité de $Y = aX$ (on pourra distinguer les cas où $a > 0$ et $a < 0$).
   Déterminons la fonction de répartition de X.
   $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.
   Ainsi, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$.
   Déterminons la fonction de répartition de Y.
   $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(aX \leqslant x)$.
   - Si $a > 0$,
     $$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/a < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x/a} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a}{x} & \text{sinon} \end{cases}.$$
   - Si $a < 0$,
     $$F_Y(x) = 1 - F_X\left(\frac{x}{a}\right) = 1 - \begin{cases} 0 & \text{si } x/a < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x/a} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a \\ \dfrac{a}{x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

   Il est immédiat que dans chacun des deux cas, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en a.
   Ainsi, Y est une variable à densité.
   - Si $a > 0$,
     $$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $a < 0$,
$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > a \\ -\dfrac{a}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque : lorsqu'on a dans le cas $a > 0, F_Y(x) = F_X(x/a)$, on peut conclure que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1 sauf éventuellement en quelques valeurs et par suite, Y est à densité et $f_Y(x) = \dfrac{1}{a} f_X(x/a) = ...$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminons la fonction de répartition de X.

- Si $x < -\ln(2), F_X(x) = 0$
- Si $-\ln(2) \leqslant x < 0, F_X(x) = [e^t]_{-\ln(2)}^x = e^x - \dfrac{1}{2}$
- Si $0 \leqslant x < \ln(2), F_X(x) = \dfrac{1}{2} + [-e^{-t}]_0^x = \dfrac{3}{2} - e^{-x}$
- Si $\ln(2) \leqslant x, F_X(x) = 1$

Ainsi, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(2) \\ e^x - \dfrac{1}{2} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x < 0 \\ \dfrac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x < \ln(2) \\ 1 & \text{si } \ln(2) \leqslant x \end{cases}$.

2. Calculons $P(X \geqslant 0)$

$\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1 - F_X(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. On pose $Y = |X|$. Déterminons la fonction de répartition G de Y, puis montrons que Y est une variable aléatoire à densité, et donnons-en une densité.

$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x)\mathbb{P}(|X| \leqslant x)$.

- Si $x < 0, G(x) = 0$
- Si $x \geqslant 0, G(x) = \mathbb{P}(-x \leqslant X \leqslant x)$.

Ainsi, $G(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) - \mathbb{P}(X \leqslant -x) = F_X(x) - F_X(-x)$.

On a $F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > \ln(2) \\ e^{-x} - \dfrac{1}{2} & \text{si } \ln(2) \geqslant x > 0 \\ \dfrac{3}{2} - e^x & \text{si } 0 \geqslant x > -\ln(2) \\ 1 & \text{si } -\ln(2) \geqslant x \end{cases}$.

Donc $G(x) = \begin{cases} 2 - 2e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x < \ln(2) \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln(2) \end{cases}$

Ainsi, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2 - 2e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x < \ln(2) \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln(2) \end{cases}$

On démontre facilement que $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = G(0)$ et que $\lim\limits_{x\to \ln(2)} G(x) = G(\ln(2))$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle étant C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que G est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en $\ln(2)$.

Ainsi, Y est une variable à densité et on peut prendre pour densité

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x < \ln(2) \\ 0 & \text{si } x \geqslant \ln(2) \end{cases}$$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f_X (supposée continue sur $\mathbb{R}$) et de fonction de répartition F_X.

1. Démontrons que pour tous réels a et b avec $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et exprimons sa densité en fonction de f_X, a et b.

- Si $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, F_y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}\right) = F_X\left(\dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}\right)$.

$x \to \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et F_X est également continue sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $x \to \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et F_X est également C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Y est une variable à densité.

Et $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$.

- Si $a < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, F_y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$.

  $x \to \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et F_X est également continue sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

  De plus, $x \to \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et F_X est également C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, Y est une variable à densité.

  Et $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$.

Ainsi, dans tous les cas, Y est une variable à densité et $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}\right)$.

2. Démontrons que la variable aléatoire $Y = X^2$ est à densité et exprimons sa densité en fonction de f_X.
$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x)$.
Si $x < 0, F_Y(x) = 0$.
Si $x \geqslant 0, F_Y(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(\sqrt{x})$.
Tout comme la question précédente, le caractère C^1 de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ permet d'affirmer que Y est une variable à densité et $\forall x \geqslant 0, f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(\sqrt{x}) - f_X(\sqrt{x}))$.

3. Démontrons que la variable aléatoire $Y = e^X$ est à densité et exprimer sa densité en fonction de f_X.
$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(e^X \leqslant x)$.
Si $x \leqslant 0, F_Y(x) = 0$.
Si $x > 0, F_Y(x) = F_X(\ln x)$.
Tout comme la question précédente, le caractère C^1 de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet d'affirmer que Y est une variable à densité et $\forall x > 0, f_Y(x) = \frac{1}{x}f_X(\ln x)$.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{6}{x^7} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrons que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.

X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

La fonction étant nulle sur $]-\infty; 1[$, il suffit d'étudier la convergence (absolue) de $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ soit $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^6}dx$.

Soit $t \geqslant 1$, $\int_1^t \frac{6}{x^6}dx = 6\left[\frac{x^{-5}}{-5}\right]_1^t = -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{t^5} - 1\right)$ d'où, par passage à la limite en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^6}dx$ converge et par suite, X admet une espérance $E(X) = \frac{6}{5}$.

Regardons si X admet un moment d'ordre 2 ce qui revient à étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} x^2f(x)dx$ soit $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^5}dx$ et par suite, $E(X^2) = \frac{3}{2}$.

Ainsi, d'après le théorème de Koenig-Huygens, X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{50}$.

Exercice 9

Pour $\lambda > 0$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrons que f est une densité de probabilité.
   f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$.
   La fonction étant nulle sur $]-\infty;0[$, il suffit de démontrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.
   Soit $t \geqslant 0$.
   $\int_0^t f(x)dx = 1 - e^{-\lambda t}$ et donc par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge vers 1.
   Soit donc X une variable aléatoire de densité f.
2. Justifions que X admet une espérance et calculons-la.
   X admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument i.e $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge.
   Soit $t \geqslant 0$. Déterminons $\int_0^t xf(x)dx$.
   Posons $u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ et $v(x) = x$.
   $u(x) = -e^{-\lambda x}$ et $v'(x) = 1$.
   u et v sont de classe C^1 sur $[0;t]$ donc par IPP, on a :
   $\int_0^t xf(x)dx = -te^{-t} - \int_0^t -e^{-\lambda x}dx$ i.e
   $\int_0^t xf(x)dx = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$.
   $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-\lambda t} = 0$ par CC donc l'intégrale converge et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
3. Justifions que X admet une variance et calculons la.
   Regardons si X admet un moment d'ordre 2.
   Pour cela, étudions la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$.
   Soit $t \geqslant 0$. Déterminons $\int_0^t x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$.
   A l'aide d'une double IPP, on a
   $\int_0^t x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{-\lambda^2t^2e^{-\lambda t} - 2\lambda te^{-\lambda t} - 2e^{-\lambda t} + 2}{\lambda^2}$ et par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.
   D'après le théorème de Koenig-Huygens, X admet une variance et $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.
4. Déterminons la fonction de répartition F_X de X.
   $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
   Ainsi,
   $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$
5. Déduisons-en la médiane de X, notée $med(X)$ i.e le réel a pour lequel $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \frac{1}{2}$.
   On cherche la valeur de a telle que $F_X(a) = \frac{1}{2}$. Elle appartient à $\mathbb{R}^+$.
   $F_X(a) = \frac{1}{2} \iff e^{-\lambda a} = \frac{1}{2}$ i.e $a = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^3} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrons que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
   f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$.
   Il suffit donc de déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, soit $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ de par la nullité de f sur $]-\infty;0[$.

Soit $t \geqslant 0$,

$$\int_0^t f(x)dx = -\left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{(1+t)^2}.$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} = 1$ donc l'intégrale converge et f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminons la fonction de répartition F_X de X.

On obtient $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

3. A l'aide d'un changement de variable affine, justifions la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$ et calculons la.

L'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $x \geqslant 0$, déterminons $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}dt$.

Soit $u = 1+t$.

- Lorsque t varie de 0 à x, u varie de 1 à $1+x$
- $u = 1+t \Rightarrow t = u-1$
- $dt = du$

$u \to u-1$ est C^1 sur $[1; 1+x]$ donc le changement de variable est licite et on a

$$\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}dt = \int_1^{1+x} \frac{2(u-1)}{u^3}du = 2\int_1^{1+x} u^{-2} - u^{-3}du = 1 - \frac{2x+1}{(1+x)^2}.$$

Par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre converge vers 1.

4. Déduisons-en que X admet une espérance et déterminons la.

X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument i.e $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$ converge, ce qui est la cas d'après la question précédente.

Ainsi, $E(X) = 1$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Étude de la fonction f

a. Justifions que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

f est nulle sur $]-\infty; 0[$ donc dérivable sur cet intervalle et elle est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc elle est également dérivable sur cet intervalle.

Est-elle continue en 0 ?

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

De plus, $f(0) = 0 \times e^{-0} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et par suite, f est continue en 0.

Est-elle dérivable en 0 ?

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.

Ainsi, $f_d(0) \neq f_g(0)$ et par suite, f n'est pas dérivable en 0.

b. Dressons le tableau de variations complet de f sur $[0; +\infty[$.

$\forall x \geqslant 0, f'(x) = e^{-x}(1-x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par CC.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

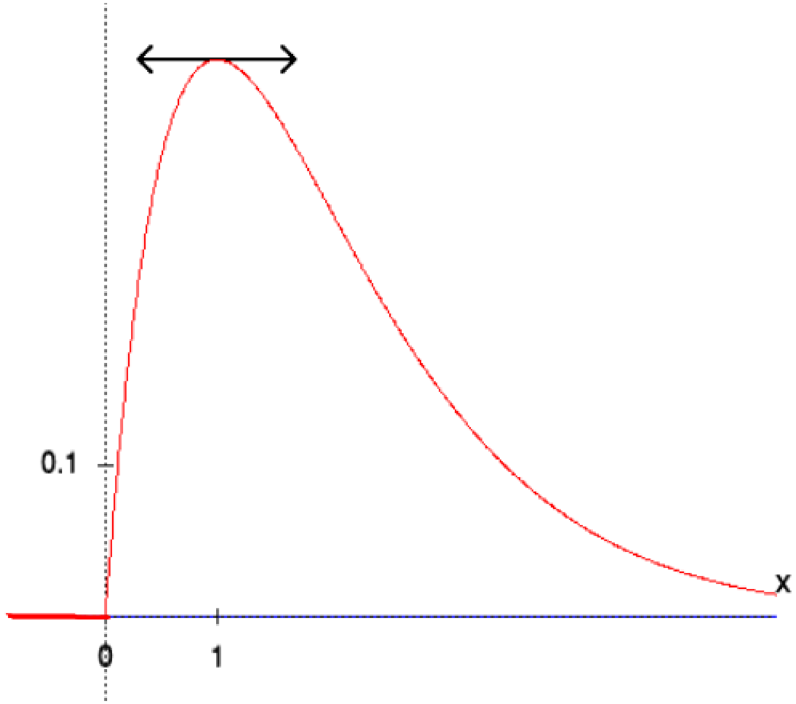
c. Étudions la convexité de f sur $[0; +\infty[$.

f est de classe C^2 sur $[0; +\infty[$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^{-x}(x-2)$.

Ainsi, f est convexe sur $[2; +\infty[$ et concave sur $[2; +\infty[$.

d. Donnons l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$. Donnée : $e^{-1} \simeq 0,37$.



2. Étude d'une première variable aléatoire

a. Montrons que f est une densité de probabilité.

f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Il suffit, pour cela, de montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Soit $t \geqslant 0$.

En utilisant une IPP, on a :

$\int_0^t f(x)dx = 1 - e^{-t} - te^{-t}$.

Par passage à la limite en $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Ainsi, f est une densité de probabilité.

On note alors X une variable aléatoire de densité f dont la fonction de répartition est notée F.

b. Sans calcul, justifions que la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}$.

En tout point x où f est continue, F est dérivable en x et vérifie $F'(x) = f(x)$.

On en déduit ainsi que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrons que pour tout réel x,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$:
  $F(x) = 0$, f étant nulle sur $]-\infty; 0[$.
- Si $x \geqslant 0$:
  $F(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$

d'où le résultat.

d. Montrons que la variable aléatoire X admet une espérance, que l'on calculera.

X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ CVA i.e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ converge.

Soit $t \geqslant 0$.

A l'aide d'une double IPP, on obtient $\displaystyle\int_0^t x^2e^{-x}dx = -2te^{-t} - t^2e^{-t} - 2e^{-t} + 2$ et par passage à la limite, on en déduit que X admet une espérance et que $E(X) = 2$.

3. Étude d'une seconde variable aléatoire

On considère maintenant la variable aléatoire $Y = e^X$.

a. Déterminons la fonction de répartition, notée G, de la variable aléatoire Y.

$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(e^X \leqslant x)$.

- Si $x \leqslant 0, G(x) = 0$

- Si $x > 0, G(x) = \mathbb{P}(X \leqslant \ln(x))$.

  Ainsi, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln(x) < 0 \\ 1 - e^{-\ln(x)}(1+\ln(x)) & \text{si } \ln(x) \geqslant 1 \end{cases}$

Ainsi, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}(1+\ln(x)) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

b. On démontre facilement que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (F étant C^1 et ln également) donc Y est une variable à densité.

Soit $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

c. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$ CVA i.e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx$ converge.

Soit $t \geqslant 1$.

$\displaystyle\int_1^t \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^t = \frac{(\ln(t))^2}{2}$ qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale diverge et Y n'admet pas d'espérance.