Exercice 1

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numérotée k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (de manière équiprobable) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

1. Déterminons la probabilité d'avoir deux boules blanches.

   Soit U_i :"On choisit l'urne i" et B :"Les deux boules tirées sont blanches".

   Les événements $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réalisent une partition de Ω donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k)\times \mathbb{P}_{A_k}(B)\\ &= \frac{1}{n}\times \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}\times \sum_{k=2}^{n} k^2-k\\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}\times\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}\times \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}\\ &= \frac{n+1}{3n}\end{aligned}$$

2. Si on tire les deux boules blanches successivement et avec remise, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k)\times \mathbb{P}_{A_k}(B)\\ &= \frac{1}{n}\times \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\\ &= \frac{1}{n^3}\times \sum_{k=2}^{n} k^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\end{aligned}$$

3. Dans les deux cas, la limite vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

Exprimons les évènements suivants à l'aide des évènements A_i :

1. B_i : « Le premier 1 apparaît au i-ème lancer. »

   $B_1 = A_1$ et $\forall i \geqslant 2, B_i = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1}\overline{A_k}\right)\cap A_i$.

2. C : « Au moins un des résultats est un 1. »

   $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$.

3. D : « Aucun lancer ne donne un 1 ».

   $D = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}$.

Exercice 3

1. VRAI. $\forall n\in\mathbb{N}, A_n\subset A_{n+1}$ donc $\mathbb{P}(A_n)\leqslant \mathbb{P}(A_{n+1})$
2. FAUX ! Des événements ne sont pas des nombres réels.
3. FAUX ! Pour la même raison.
4. VRAI. La suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de limite monotone, elle converge.
5. FAUX ! A est négligeable mais il n'est pas nécessairement vide.
6. Déterminons A_4 (le raisonnement est identique pour les autres).

   Soit B_n : "Le numéro 4 apparait au nième tirage".

   $A_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

   D'après le corollaire du théorème de limite monotone,

   $\mathbb{P}(A_4) = \lim_n \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$.

   $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{B_k}\right) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ par indépendance.

   Ainsi, $\mathbb{P}(A_4)=1$.

7. FAUX ! Si A_n est réalisé, A_{n+1} ne l'est pas nécessairement (il peut apparaître un 1 au $n+1$ ème lancer).
8. VRAI. Si A_n est réalisé, alors A_{n+1} l'est nécessairement.

Exercice 4

Déterminons $\mathbb{P}(An)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et déduisons-en $\mathbb{P}(B)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

$(A_n)_{n\geqslant 1}$ étant une suite croissante d'événements, d'après le théorème de limite monotone, $\mathbb{P}(B) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) = 1$.

Exercice 5

1. Écrivons B à l'aide des évènements A_n.

   $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'évènements.
3. Exprimons $\mathbb{P}(An)$ en fonction de n.

   $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. On en déduit $\mathbb{P}(B)$.

   $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite décroissante d'évènements, d'après le théorème de limite monotone,

   $\mathbb{P}(B) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) = 0$.

   B est quasi-impossible.

Exercice 6

1. a. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

   Soit A_n : "On obtient une boule blanche au n-ième tirage".

   $E_1 = A_1$ donc $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geqslant 2, E_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \cap A_n$.

   Par indépendance, on en déduit que

   $\forall n \geqslant 2, \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}$ i.e $\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

   On en déduit que ceci est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

   b. Déterminons deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(E_n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

   $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

   c. Déduisons-en que l'on obtient presque sûrement au moins une boule blanche.

   Soit B : "obtenir au moins une boule blanche".

   $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.

   Les événements E_n étant deux à deux incompatibles, on a :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\\ &= \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \text{ par telescopage additif}\\ &= 1\end{aligned}$$

   d'où le résultat.

2. a. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

   $F_1 = \overline{A_1}$ donc $\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geqslant 2, F_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap \overline{A_n}$.

   Par indépendance, on en déduit que

   $\forall n \geqslant 2, \mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1}$ i.e $\mathbb{P}(F_n) = \frac{n}{(n+1)!}$.

   On en déduit que ceci est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

   De plus, $\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

   b. Déduisons-en que l'on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

Soit N : "On obtient au moins une boule noire".
$N = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$.
Les événements F_n étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n)\\ &= \lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) \text{ par telescopage additif}\\ &= 1\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 7

1. **a.** Exprimons C_n à l'aide des A_i.
   $\forall n \geqslant 1, C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

   b. Déduisons-en que $\mathbb{P}(C_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n})$.
   Par passage au complémentaire, on en déduit la relation demandée.

   c. Calculons alors $\mathbb{P}(C_n)$.
   Par indépendance, on en déduit que $\mathbb{P}(C_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

2. **a.** Justifions que C_n est une suite croissante d'évènements.
   $\forall n \geqslant 1, C_n \subset C_{n+1}$.
   En effet, si on obtient au moins un 1 lors des n premiers lancers, on obtient au moins un 1 lors des $n+1$ lancers.

   b. Exprimons C en fonction des C_n et déduisons-en que C est presque sûr.
   $C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$.
   D'après le théorème de limite monotone, on en déduit que $\mathbb{P}(C) = \lim_n \mathbb{P}(C_n) = 1$.
   C est quasi-certain.

   c. Montrons que D est négligeable.
   $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(C)$ d'où le résultat.

3. **a.** Exprimons C à l'aide des A_i.
   $C = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$.
   La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite monotone d'évènements.

   b. Appliquons le corollaire du théorème de la limite monotone pour retrouver que D est négligeable.
   $D = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$ et d'après le corollaire du théorème de limite monotone, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \lim_n \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)\\ &= \lim_n \left(\frac{5}{6}\right)^n\\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 8

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. Le joueur A gagne si le total de ses deux dés donne 7, et B gagne si le total de ses deux dés donne 6. B joue le premier et ensuite (si nécessaire), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminons la probabilité des évènements :
   - G_A : « le joueur A obtient 7 »
   - G_B : « le joueur B obtient 6 »

   Un tableau à double entrée montre que $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(G_B) = \frac{5}{36}$.

2. On introduit les évènements :
   - B_n : « le joueur B gagne à son n-ième lancer »
   - A_n : « le joueur A gagne à son n-ème lancer »

   Déterminons la probabilité de ces évènements.
   $\mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{36}$.

$\forall n \geqslant 2, \mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$ (valable pour $n = 1$).

$\mathbb{P}(B_1) = \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$.

De même, $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$ (valable pour $n = 1$).

3. On note :

- V_A : « le joueur A gagne »
- V_B : « le joueur B gagne »

Écrivons V_A et V_B en fonction des évènements A_n et B_n.

$V_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

De même, $V_B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

4. Déduisons-en la probabilité de V_A et V_B.

Les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{31}{216} \times \frac{1}{1 - \frac{155}{216}} \\ &= \frac{31}{216} \times \frac{216}{61} \\ &= \frac{31}{61}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{155}{216}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36} \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{155}{216}} \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{216}{61} \\ &= \frac{30}{61}\end{aligned}$$

Le jeu n'est pas équilibré, B a plus de chance de gagner.

Exercice 9

1. On a équiprobabilité donc $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$.

2. A_n, B_n et C_n réalisent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

Déterminons $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ donc $\frac{1}{3} + 8\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 1$.

Ainsi, $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{12}$ et $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{7}{12}$.

Par suite, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n$.

En procédant de même, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$.

3. On a pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}c_{n+2} &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{9}a_n + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}\left(c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n\right) + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n\end{aligned}$$

On reconnait ici une SRL d'ordre 2.

Résolvons l'équation caractéristique $x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}$ i.e

$12x^2 - 8x + 1 = 0$.

Déterminons le discriminant.

$\Delta = 16 > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{6}$.

Il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

On détermine λ et μ en résolvant le système $\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{6}\mu = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{36}\mu = \frac{2}{9} \end{cases}$ i.e

$\begin{cases} 3\lambda + \mu = 2 \\ 9\lambda + \mu = 8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$.

Ainsi, $\forall n \geqslant 1, c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 3c_{n+1} - c_n$ on en déduit que $a_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2 \times 6^n}$.

A_n, B_n et C_n réalisant une partition de l'univers, on en déduit que $b_n = 1 - \frac{3}{2^{n+1}} + \frac{1}{2 \times 6^n}$.

4. $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$ appartenant à $]-1;1[$, $\lim\limits_n a_n = 0$, $\lim\limits_n b_n = 1$ et $\lim\limits_n c_n = 0$.