

Exercice 1

Les fonctions f sont continues sur I donc admettent une primitive sur I :

a) $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

b) $F(x) = \frac{1}{10}(2x-3)^5$

c) $F(x) = \frac{2}{3} \ln(5-3x)$

d) $F(x) = 3\sqrt{2x+1}$

e) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

f) $F(x) = \frac{1}{\ln(2)}2^x$

g) $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

Dans tous les exercices, dès que l'on rencontre une intégrale, on justifie son existence par le fait que la fonction intégrée est continue ou continue par morceaux sur le segment.

Exercice 2

a) $I_1 = \int_0^2 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[(x^2+1)^{3/2}]_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

b) $I_2 = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^{\ln(2)} = \frac{3}{2}$

c) $I_3 = \int_{-1}^2 -x^2 - x + 2dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$

d) $I_4 = \int_0^3 x[x]dx = \int_0^1 x[x]dx + \int_1^2 x[x]dx + \int_2^3 x[x]dx$

$$I_4 = \int_1^2 xdx + \int_2^3 2xdx = \frac{13}{2}$$

e) $I_5 = \int_{-2}^2 2x^5 - x^3 - xdx = 0$ car la fonction est impaire et l'intervalle est centré en 0

f) $I_6 = \int_0^1 \frac{2x^4}{(1+x^5)^3}dx = \frac{2}{5}\left[\frac{(1+x^5)^{-2}}{-2}\right]_0^1 = \frac{3}{20}$

g) $I_7 = \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x}dx = \left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$

h) $I_8 = \int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{1/x^2}dx = -\frac{1}{2}[e^{1/x^2}]_1^2 = -\frac{1}{2}e^{1/4} + \frac{1}{2}e$

i) $I_9 = \int_{-2}^1 |x|dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \frac{5}{2}$

j) $I_{10} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^4}dx = \left[\frac{(1+x)^{-3}}{-3}\right]_0^1 = \frac{7}{24}$

k) $I_{11} = \int_2^3 \frac{1+\ln(x)}{x\ln(x)}dx = [\ln(x\ln(x))]_2^3 = \ln\left(\frac{\ln(27)}{\ln(4)}\right)$

l) $I_{12} = \int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^{e^2} = 2$

Exercice 3

En utilisant une (ou plusieurs) intégrations par parties, calculons les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_0^2 xe^{3x}dx$

$$u'(x) = e^{3x} \quad v(x) = x$$

Soient $u(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \quad v'(x) = 1$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[0; 2]$ donc d'après le théorème d'IPP, on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{3}e^{3x} \times x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{3}e^{3x}dx \\ &= \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}(e^6 - 1) \\ &= \frac{1}{9}(5e^6 + 1) \end{aligned}$$

b) $I_2 = \int_1^2 x \ln(x)dx$

$$u'(x) = x \quad v(x) = \ln(x)$$

Soient $u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[1; 2]$ donc d'après le théorème

d'IPP, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \ln(2) - \frac{1}{4} [x^2]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c) $I_3 = \int_1^2 x \sqrt{3-x} dx$

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= \sqrt{3-x} & v(x) &= x \\ u(x) &= -\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[1; 2]$ donc d'après le théorème d'IPP, on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[-\frac{2}{3} x (3-x)^{3/2} \right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{2}{3} (3-x)^{3/2} dx \\ &= \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} [(3-x)^{5/2}]_1^2 \\ &= \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} (1 - 4\sqrt{2}) \\ &= \frac{-24 + 36\sqrt{2}}{15} \\ &= \frac{-8 + 12\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

d) $I_4 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & v(x) &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ u(x) &= x & v'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc d'après le théorème d'IPP, on a $I_4 = 1 - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

e) $I_5 = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} & v(x) &= x e^x \\ u(x) &= -\frac{1}{1+x} & v'(x) &= e^x(1+x) \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc d'après le théorème

d'IPP, on a $I_5 = \frac{1}{2} e - 1$.

f) $I_6 = \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x^2} dx$

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x^2} & v(x) &= (\ln(x))^2 \\ u(x) &= -\frac{1}{x} & v'(x) &= 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[1; e]$ donc d'après le théorème

d'IPP, on a $I_6 = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx$.

En procédant à une nouvelle IPP, on obtient alors $I_6 = 2 - 5e^{-1}$.

g) $I_7 = \int_1^e x (\ln(x))^2 dx$

En procédant à une double IPP, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\ln(x))^2$ dans la première puis $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$ dans la seconde, on obtient

$$I_7 = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

h) $I_8 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$

En procédant à une double IPP, en posant $u'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x^2$ dans la première puis $u'(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x$ dans la seconde, on obtient

$$I_8 = \frac{1 - 5e^{-2}}{4}.$$

Exercice 4

En utilisant le changement de variable indiqué, calculons les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_1^4 \frac{\ln(x/2)}{4+x^2} dx, u = \frac{4}{x}.$

La fonction $x \rightarrow \frac{4}{x}$ est de classe C^1 sur $[1; 4]$.

On pose $u = \frac{4}{x}$.

- Lorsque x varie de 1 à 4, alors u varie de 4 à 1
- $x = \frac{4}{u}$ donc $dx = -\frac{4}{u^2} du$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^4 \frac{\ln(x/2)}{4+x^2} dx \\ &= \int_4^1 \frac{\ln(2/u)}{4+(4/u)^2} \left(-\frac{4}{u^2}\right) du \\ &= \int_1^4 \frac{\ln(2/u)}{u^2+4} du \\ &= - \int_1^4 \frac{\ln(u/2)}{u^2+4} du \\ &= -I_1 \end{aligned}$$

donc $2I_1 = 0$ i.e $I_1 = 0$.

b) $I_2 = \frac{1}{16}$

c) $I_3 = \frac{2\ln(2)-1}{8}$

d) $I_4 = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 2$

e) $I_5 = 2e^2 + 2$

f) $I_6 = 0$

g) $I_7 = \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) + 1$ h) $I_8 = \frac{14\sqrt{2}-16}{15}$

Exercice 5

Pour chacune des intégrales suivantes, trouvons la décomposition en éléments simples indiquée et déduisons-en la valeur de l'intégrale.

1. Trouvons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} \iff \frac{1}{x^2-4} = \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \text{ i.e } (a+b)x+2a-2b=1.$$

Par identification, on en déduit que $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$ soit $a = \frac{1}{4}$ et

$$b = -\frac{1}{4}.$$

On en déduit la valeur de $I = \int_0^1 \frac{2}{x^2-4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2}{x^2-4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx \text{ par linéarité} \\ &= \frac{1}{2} [\ln(|x-2|)]_0^1 - \frac{1}{2} [\ln(|x+2|)]_0^1 \\ &= -\frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

2. On trouve $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}$ et $c = -\frac{1}{3}$.

On en déduit que $J = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{28}{13}\right)$.

Exercice 6

1. $u = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

2. $I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, montrons que $I_n = \int_0^1 u^n e^u du$.

Lorsque x varie de 1 à e , alors u varie de 0 à 1.

$u = \ln(x) \Rightarrow x = e^u$ et par suite, $dx = e^u du$.

Ainsi, $I_n = \int_0^1 u^n e^u du$.

2. Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$, puis la limite de (I_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0; 1], 0 \leq u^n e^u \leq u^n \times e$

d'où par passage aux intégrales sur $[0; 1]$,

$$0 \leq I_n \leq e \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \text{ d'où le résultat.}$$

$$\lim_n 0 = \lim_n \frac{e}{n+1} = 0.$$

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim_n I_n = 0$.

Exercice 8

1. a. f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et

$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} \text{ i.e } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

- b. On en déduit la valeur de I .

$$I = [\ln(x + \sqrt{x^2-1})]_{\sqrt{2}}^2 = \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}} \right).$$

2. A l'aide d'une intégration par parties sur J , montrons que

$$J = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - I - J,$$

puis on en déduira la valeur de J (on pourra écrire $x^2 = -((1-x^2)-1)$ après l'IPP pour avancer le calcul).

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & v(x) &= \sqrt{x^2-1} \\ u(x) &= x & v'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[\sqrt{2}; 2]$ donc d'après le théorème

d'IPP, on a :

$$\begin{aligned} J &= [x\sqrt{x^2-1}]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - J - I \end{aligned}$$

Ainsi,

$$J = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}} \right).$$

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, montrons que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Montrons que $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$.

Soient
$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & v(x) &= (1-x^2)^{n+1} \\ u(x) &= x & v'(x) &= (n+1)(1-x^2)^n \times (-2x) \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[-1; 1]$ donc d'après le théorème

d'IPP, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [x(1-x^2)^{n+1}]_{-1}^1 + (2n+2) \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^n dx \\ &= (2n+2) \int_{-1}^1 (x^2-1+1)(1-x^2)^n dx \\ &= -(2n+2)I_{n+1} + (2n+2)I_n \text{ c'est pas beau ça?!} \end{aligned}$$

donc $(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$ d'où le résultat.

2. On en déduit la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$ (conjecture puis preuve).

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ ce qu'on démontre par récurrence.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx$.

1. Calculons I_0 .

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}.$$

2. Montrons que $\forall x \in [0, 1], \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ et déduisons-en I_1 .

$$\forall x \in [0; 1], 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} \text{ d'où le résultat.}$$

$$I_1 = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx \text{ soit } I_1 = [x - \ln(|1+x|)]_0^1 \text{ i.e } I_1 = 1 - \ln(2).$$

3. Calculons I_2 .

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Ainsi, } I_2 = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

4. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], x(1-x^n) \leq \frac{x}{1+x^n} \leq x$.

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq x^n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x^n \leq 2.$$

$$\text{Ainsi, } 0 < \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \text{ et donc } \frac{x}{1+x^n} \leq x.$$

$$\text{De plus, } x(1-x^{2n}) \leq x \text{ donc } x(1-x^n) \leq \frac{x}{1+x^n} \text{ d'où le résultat.}$$

5. Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$, puis la limite de (I_n) .

$$\text{Par passage aux intégrales sur } [0, 1], \text{ on en déduit que } \int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 dx.$$

$$\text{Or, } \int_0^1 x(1-x^n) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \text{ et } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

d'où le résultat.

$$\lim_n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } (I_n) \text{ converge et } \lim_n I_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 11

On souhaite calculer $\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \text{ et par suite, } 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

$$\text{Par passage aux intégrales sur } [0, 1], \text{ on a } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{On en déduit la limite de } I_n \text{ en utilisant le théorème des gendarmes sachant que } \lim_n 0 = 0 \text{ et } \lim_n \frac{1}{n+1} = 0.$$

(I_n) converge vers 0 donc $((-1)^n I_n)$ converge vers 0 car la suite $((-1)^n)$ est bornée.

2. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$.

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x} dx \text{ i.e } I_{n+1} + I_n = \int_0^1 x^n dx \text{ d'où le résultat.}$$

Calculons I_0 et I_1 .

$$I_0 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

$$I_1 = 1 - \ln(2) \text{ (voir exercice précédent)}$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

$$\text{Soit } P(n) : "(-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}."$$

• Initialisation :

$$\text{Pour } n = 1, (-1)^1 I_1 = -I_1 = \ln(2) - 1 \text{ et } \ln(2) + \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^k}{k} =$$

$$\ln(2) - 1.$$

$P(0)$ est vraie.

• Hérédité :

Supposons la propriété vraie à un certain rang n et démontrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n I_n \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \ln(2) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Concluons pour la valeur de la limite cherchée.

$$\lim_n (-1)^n I_n = 0 \text{ donc la série } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge et sa somme est } -\ln(2).$$

Exercice 12

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} C^0([0, 1]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_0^1 f^2(t) dt \end{cases}.$$

Déterminons les antécédents de 0 par φ .

On cherche f , fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$.

Si $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$, alors, comme f est continue sur $[0; 1]$, il en est de même pour f^2 et par suite, f^2 est la fonction nulle sur $[0; 1]$, donc f est nulle sur $[0; 1]$.

La fonction nulle est telle que $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ donc l'antécédent de 0 par la fonction ϕ est la fonction nulle sur $[0; 1]$.

Exercice 13

Calculons les limites des suites :

$$1. R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f(x) = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de Riemann à gauche de la fonction f prise entre 0 et 1.

$$\text{Or, } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$\text{Ainsi, } \lim_n R_n = \frac{1}{2} \ln(2).$$

$$2. S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de Riemann à gauche de la fonction f prise entre 0 et 1.

$$\text{Or, } \int_0^1 f(x) dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_n S_n = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$3. T_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de Riemann à gauche de la fonction f prise entre 0 et 1.

$$\text{Or, } \int_0^1 f(x) dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

$$\text{Ainsi, } \lim_n T_n = \ln(2).$$

Exercice 14

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathcal{D}_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \end{cases}.$$

1. Déterminons $\mathcal{D}_f$.

La fonction intégrée est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, pour tout réel x tel que x et $1/x$ appartiennent à $]0; +\infty[$, l'intégrale sera bien définie.

Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}_*^+$.

2. Montrons que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculons $f'(x)$.

$g : t \rightarrow \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue $]0; +\infty[$ donc g admet des primitives sur cet intervalle.

Soit G l'une d'entre elle.

Ainsi, $\forall x > 0, f(x) = G(x) - G(1/x)$.

$x \rightarrow G(1/x)$ est la composée de deux fonctions dérivables donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}g(1/x) \text{ soit } f'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{-\ln(x)}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

3. On en déduit une valeur simplifiée de $f(x)$.

Ainsi, f est constante sur $]0; +\infty[$.

$$f(1) = 0 \Rightarrow \forall x > 0, f(x) = 0.$$

4. Retrouvons le résultat précédent en utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

- Lorsque t varie de x à $\frac{1}{x}$, u varie de $1/x$ à x
- $u = 1/t \Rightarrow t = 1/u$
- $dt = -\frac{1}{u^2}du$

La fonction $\phi : u \rightarrow 1/u$ est de classe C^1 sur le segment considéré ce qui rend le changement de variable valide et on a :

$$\forall x > 0, f(x) = -\int_x^{1/x} \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \frac{1}{u^2} du \text{ soit } f(x) = -f(x) \text{ et par suite, } f \text{ est nulle sur }]0; +\infty[.$$

Exercice 15

On définit la fonction f sur $[0, 1]$ par :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \ln(2) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Montrons que f est bien définie sur $[0; 1]$.

$$g : t \rightarrow \frac{1}{\ln(t)} \text{ est continue sur }]0; +\infty[.$$

Pour tout $x \in]0; 1[, x$ et x^2 appartiennent $]0; +\infty[$, donc f est bien définie sur $]0; 1[$ et par suite, sur $[0; 1]$.

2. a. Pour $x \in]0; 1[$, calculons $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

Soit $x \in]0; 1[$,

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt &= [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} \\ &= \ln(-\ln(x^2)) - \ln(-\ln(x)) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

b. Montrons que $\forall x \in]0; 1[, \forall t \in [x^2, x], \frac{1}{x^2 \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{x \ln(t)}$.

$$\forall x \in]0; 1[, \forall t \in [x^2, x], x \leq t \leq x^2.$$

$$\ln(t) < 0 \text{ donc } 0 > x \ln(t) \geq t \ln(t) \geq x^2 \ln(t).$$

$$\text{Par passage à l'inverse, on a : } \frac{1}{x^2 \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{x \ln(t)}.$$

c. Déduisons-en que $\forall x \in]0; 1[, \quad x^2 \ln(2) \leq f(x) \leq x \ln(2)$.

$$\text{De l'inégalité précédente, il vient } \frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{\ln(t)}.$$

Par passage aux intégrales sur $[x^2; x]$, on en déduit que

$$\int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln(t)} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} \leq \int_{x^2}^x \frac{x^2}{\ln(t)}.$$

D'après la question 2.a et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$-x \ln(2) \leq f(x) \leq -x^2 \ln(2) \text{ d'où le résultat.}$$

d. Déduisons-en que f est continue sur $[0, 1]$.

$g : t \rightarrow \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[x; x^2]$. Soit G une de ces primitives sur $]0; 1[$.

On a alors, $\forall x \in]0; 1[, f(x) = G(x^2) - G(x)$ et par conséquent, f est continue sur $]0; 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(2) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(2) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Or, $f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

Un raisonnement similaire permet d'affirmer que f est continue en 1 donc f est continue sur $[0; 1]$.

3. Montrons que f est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et déterminons ses variations.

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = G(x^2) - G(x).$$

Les fonctions G et $x \rightarrow x^2$ étant de classe C^1 sur $]0; 1[$, il en est de même pour f et

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

$\forall x \in]0; 1[, x-1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$ et par suite, f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Exercice 16

(D'après EDHEC 2016)

Pour chaque entier naturel n on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrons que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminons $f'_n(x)$ pour tout $x \in [n; +\infty[$.

$t \rightarrow e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n; +\infty[$ donc f_n est la primitive de cette fonction sur $[n; +\infty[$ qui s'annule en n .

Ainsi, $\forall x \geq n, f'_n(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$.

Donnons le sens de variation de f_n .

Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[n; +\infty[$.

2. En minorant $f_n(x)$, établissons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

$n \geq 0$ donc $\forall x \geq n, \forall t \in [n; x], e^{\sqrt{t}} \geq 1$.

Ainsi, par passage aux intégrales sur $[n; x], f_n(x) \geq x - n$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - n) = +\infty \text{ donc par comparaison, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

3. Déduisons-en que, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

f_n est continue et strictement croissante sur $[n; +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[n; +\infty[$ sur $[f(n); +\infty[$ i.e $[0; +\infty[$.

Ainsi, pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

4. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 17

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On souhaite montrer le résultat de convergence des sommes de Riemann à gauche dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

1. Montrons que $\exists M > 0, \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| < M|x - y|$.

f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc f est continue, dérivable et sa dérivée est continue sur cet intervalle.

Ainsi, f' est bornée sur $[0; 1]$ et elle atteint ses bornes et par suite, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f'| \leq M$ sur $[0; 1]$.

- f est continue sur $[0; 1]$
- f est dérivable sur $]0; 1[$
- $\forall x \in]0; 1[, |f'(x)| \leq M$

Ainsi, d'après l'IAF (V2), on en déduit que $\forall x, y \in [0; 1], |f(x) - f(y)| < M|x - y|$.

2. Déduisons-en que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right], \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left(x - \frac{k}{n} \right).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right] \subset [0; 1]$, donc l'inégalité vue en 1 appliquée à x et k/n donne le résultat escompté.

3. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, & \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \\ & \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| = \\ & \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx \right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M \left(x - \frac{k}{n} \right) dx.$$

Or, $\int_{k/n}^{(k+1)/n} M \left(x - \frac{k}{n} \right) dx = \dots = \frac{1}{2n^2}$ d'où le résultat.

4. En sommant les inégalités précédentes, montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

Ainsi, par passage à la valeur absolue et d'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} \text{ d'où le résultat.}$$

5. Concluons.

$$\lim_n \frac{M}{2n} = 0 \text{ donc } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$