Exercice 1 *Union, intersection, complémentaire*

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble Ω et des parties A et B de Ω. Déterminer explicitement les ensembles $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}\cap B$.

1. $\Omega=\{1;2;3;4\}$, $A=\{1;2\}$, $B=\{2;4\}$
2. $\Omega=\mathbb{R}$, $A=]-\infty;3]$, $B=[2;+\infty[$
3. $\Omega=\mathbb{R}$, $A=]-\infty;2]$, $B=[3;+\infty[$
4. $\Omega=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{N}$, $B=]0;+\infty[$

Exercice 2 ⋆ *Démontrer*

X, Y et Z désignent des ensembles.
A noter : On désigne par $X\setminus Y$, lu "X privé de Y", l'ensemble des éléments qui sont dans X mais pas dans Y i.e $X\setminus Y=X\cap\overline{Y}$.
Démontrer les affirmations suivantes :

1. Si $X\subset Y$ alors $X\cap Z\subset Y\cap Z$
2. $(X\subset Y)\iff(X=X\cap Y)$
3. $X=(X\cap Y)\cup(X\setminus Y)$
4. $(X\cap Y)\cap(X\cap Z)=X\cap Y\cap Z$

Exercice 3 ⋆ *Démontrer la distributivité*

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

1. Montrer que $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
2. Montrer que $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Exercice 4 *Simplifier des écritures*

Soient A et B deux parties d'un même ensemble Ω. Simplifier les écritures des ensembles suivants :

1. $\overline{A}\cap(A\cup\overline{B})$
2. $A\cup(\overline{A\cup B})$
3. $\overline{A\cap B}\cap B$
4. $\overline{A\cup B}\cap B$

Exercice 5 ⋆ *Démontrer*

Soient A et B deux parties d'un même ensemble Ω.
Montrer que $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

Exercice 6 *Manipuler le symbole "privé de "*

Soient A et B deux parties d'un même ensemble Ω.

1. Déterminer $A\backslash A$, $A\backslash\emptyset$ et $\Omega\backslash A$.
2. Montrer que si $A\backslash B=A$ alors $B\backslash A=B$.
3. Montrer que $A\backslash(A\cap B)=A\backslash B$.

Exercice 7 ⋆ *Démontrer une implication*

A, B, C étant trois parties d'un ensemble E, montrer que :
si $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$, alors $B\subset C$.

Exercice 8 *Injectivité, surjectivité et bijectivité*

Soient $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=n+1,\ \begin{cases} g(0)=0\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ g(n)=n-1\end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g.
2. Préciser $f\circ g$ et $g\circ f$.

Exercice 9 *Notion d'inverse*

Soit $f:E\longrightarrow E$ une application vérifiant $f\circ f\circ f=id_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 10 ⋆ *Propriétés classiques*

Soient E, F, G trois ensembles, $f:E\longrightarrow F$, $g:F\longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 11 ⋆ *Démontrer*

Soient E, F, G trois ensembles, $g : E \longrightarrow F, h : E \longrightarrow F, f : F \longrightarrow G$ trois applications.

Démontrer que si $f \circ g = f \circ h$ et si f est injective alors $g = h$.

Exercice 12 *Application réciproque*

On considère l'application $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \longrightarrow & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}$$

Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 13 *Bijection*

Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} n & \text{si n est impair} \\ n+2 & \text{si n est pair} \end{cases}$

Montrer que f est une bijection.

Exercice 14 *Déterminer la bijection réciproque*

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ et $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Conclure.

Exercice 15 *Application strictement croissante et injectivité*

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

2. Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

3. Trouver les solutions de l'équation d'inconnue x : $x + e^x = 1$.

Exercice 16 *Dénombrement*

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?
a. Aucune condition.
b. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
c. Il y a exactement deux valets.
d. Il y a un as et deux carreaux.
e. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
f. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
g. Les cinq cartes sont de la même couleur.
h. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

Exercice 17 *Dénombrement*

On tire 5 atouts dans un jeu de tarot.
Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?
a. Au moins un atout est multiple de 5.
b. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.
c. On a tiré le 1 ou le 21.

Exercice 18 *Encore!*

À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches :

- trois lettres (A, B et C),
- neuf chiffres non nuls (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9).

Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est formé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

a. Dans cette question, on considère que les trois chiffres du code ne sont pas forcément distincts. Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?

b. Dans cette question, on considère que le code ne contient que des chiffres distincts. Combien de codes le régisseur peut-il proposer ?

Exercice 19 *Anagrammes*

Combien y a-t-il d'anagrammes de MAISON ? de RADAR ? de MISSISSIPI ? de ABRACADABRA ?

Exercice 20 *Formule du Crible*

On considère une classe de 36 élèves qui étudient tous au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand. On sait que :

a. 22 élèves étudient l'anglais, 22 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol

b. 10 élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol, 11 à la fois l'anglais et l'espagnol.

Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Exercice 21 ⋆⋆ *Un peu de récurrence*

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0; n]\!], \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \ldots + \binom{p}{p}$