

Exercice 1 Loi d'une variable aléatoire

Dans une urne contenant 2 boules blanches et 5 rouges, on tire 3 boules une par une sans remise.

Déterminer la loi des variables aléatoires X et Y où X représente le nombre de boules blanches tirées, et Y le nombre de boules rouges tirées.

Exercice 2 Loi géométrique

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.

Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier pile obtenu, et valant 0 si l'on n'obtient jamais pile.

Exercice 3 Conditions pour une loi de probabilité

- Déterminer une CNS sur le réel a pour que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ définie par $p_n = \frac{a}{2^n}$ définisse bien une loi.
- Déterminer a pour que la suite $a^2, 2a(1-a)$ et $(1-a)^2$ définisse bien une loi.

Exercice 4 Loi d'un maximum

Dans une urne possédant n jetons numérotés de 1 à n , on tire 2 jetons, l'un après l'autre, avec remise.

On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros tirés.

Déterminer la loi de X .

Exercice 5 Loi d'une transformée

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par :

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer la loi de $Y = X^2 + 3$.

Exercice 6 Fonction de répartition

Tracer la fonction de répartition de la variable aléatoire X de loi donnée par :

x	-1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 7 Espérance d'une variable aléatoire

Calculer l'espérance de la variable aléatoire X définie dans l'exercice précédent.

Exercice 8 Espérance d'une variable aléatoire

Soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}.$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 9 Moment d'ordre r

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{e \times k!}.$$

Montrer que X admet un moment d'ordre 3 et le calculer.

Indication : on pourra utiliser $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$.

Exercice 10 Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

x	1	2	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Montrer que $Y = \sqrt{X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 11 Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que $Y = e^{-X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 12 Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-k} - e^{-k-1}$.

- Vérifier que la loi de X ainsi posée est bien définie.
- Montrer que la variable aléatoire $Y = 2^X$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 13 *Espérance d'une suite de variables aléatoires*

On lance indéfiniment un dé équilibré.

On considère les suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies par :

X_n = nombre de 6 obtenus aux n premiers lancers

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient 6 au } n^{\text{ième}} \text{ lancer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $E(Y_{n+1})$ puis montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, E(X_n) = \frac{n}{6}$.

Exercice 14 *Variance d'une variable aléatoire*

Calculer la variance de la variable aléatoire X de loi donnée par :

x	-1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

- en utilisant la définition
- en utilisant le théorème de Koenig-Huygens

Exercice 15 *Espérance et variance*

Soient p et q des réels tels que $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

Soit X la variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p.$$

Montrer que X admet une espérance et une variance et en donner les valeurs.

Exercice 16 *Espérance et variance*

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 17 *Espérance et variance*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X la variable aléatoire définie par $X(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $P(X = 0) = P(X = 3) = a$ et $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2} - a$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de a ?
2. Justifier l'existence et calculer $E(X)$.
3. Justifier l'existence et calculer $V(X)$ de deux façons : une première fois en utilisant la définition de la variance et une seconde fois avec la formule de Koenig-Huygens.
4. Quelle est la loi de $Y = X(X-1)(X-2)(X-3)$? Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.
5. On pose $Z = X(X-1)$. Sans déterminer la loi de Z , calculer $E(Z)$.
6. Déterminer la loi de Z et retrouver son espérance.

Exercice 18 *Espérance*

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.

on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant :

- Si elle est noire, on arrête l'expérience
- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne, on y ajoute une autre boule blanche et on poursuit l'expérience en effectuant un autre tirage

On réitère l'expérience et les tirages jusqu'à l'obtention de la première boule noire.

Soit X la variable égale au rang d'obtention de la première boule noire et $Y = \frac{1}{X}$.

1. Préciser $X(\Omega)$ puis justifier que $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.
2. X admet-elle une espérance ?
3. Montrer que Y admet une espérance (on pourra utiliser $\frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$).

Exercice 19 *Espérance*

Un joueur mise un euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette 3 dés.

- Si l'entier choisi sort respectivement 1, 2 ou 3 fois, alors le joueur gagne respectivement 2, 3 ou 4 euros
- Sinon le joueur perd sa mise

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en prenant en compte sa mise initiale).

Soit $Y = |X|$.

1. Préciser $X(\Omega)$ puis déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Déterminer la loi de Y .

Exercice 20 *Vers le concours*

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges ($n \geq 2$).

On tire les boules une à une sans remise jusqu'à l'obtention de la première boule blanche.

On appelle X , le rang d'apparition de la première boule blanche et Y , le nombre de boules restant dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Préciser $X(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}.$$

2. Montrer que $E(X) = \frac{n + 1}{3}$.

3. Exprimer Y en fonction de X puis $E(Y)$ en fonction de n .